Outils pour la physique

# Outils mathématiques

## Sommaire


**I. Nombres complexes . . . 1**
I.1. Définitions . . . 1
I.2. Propriétés . . . 2
I.3. Interprétation géométrique . . . 2
**II. Fonctions . . . 2**
II.1. Développements limités . . . 2
II.2. Valeur moyenne . . . 3
**III. Équations différentielles . . . 3**
III.1. Équations différentielles du premier ordre . . . 3
III.2. Équations différentielles du second ordre . . . 4
**IV. Calcul différentiel . . . 6**
IV.1. Différentielle d'une fonction d'une variable . . . 6
IV.2. Différentielle d'une fonction de deux variables . . . 6
IV.3. Théorème de Schwarz . . . 6
**V. Systèmes de coordonnées . . . 8**
**VI. Analyse vectorielle . . . 9**
VI.1. Définitions . . . 9
VI.2. Intégrations . . . 9
VI.3. Différentielle d'un champ scalaire . . . 9
VI.4. Expression des opérateurs en coordonnées cartésiennes . . . 10
VI.5. Expression des opérateurs en coordonnées cylindriques . . . 11
VI.6. Expression des opérateurs en coordonnées sphériques . . . 11
VI.7. Propriétés . . . 11
VI.8. Théorèmes . . . 12


# I. Nombres complexes

## I.1. Définitions

Un nombre complexe s'exprime de la forme :

$$\underline{z} = a + \mathrm{j}\, b$$

- sa partie réelle est $\mathrm{Re}(\underline{z}) = a$ ;
- sa partie imaginaire est $\mathrm{Im}(\underline{z}) = b$ ;
- son module est $z = |\underline{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ;
- son argument est $\theta = \arg(\underline{z}) = \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right)$ si $a \geqslant 0$, et $\arg(\underline{z}) = \pi + \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right)$ si $a < 0$.

On peut également l'exprimer sous forme exponentielle :

$$\underline{z} = z\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\theta}$$

et comme $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\theta} = \cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta$, on obtient en développant :

- la partie réelle $\mathrm{Re}(\underline{z}) = z\cos(\theta)$ ;
- la partie imaginaire $\mathrm{Im}(\underline{z}) = z\sin(\theta)$.

Le conjugué complexe de $\underline{z}$ est :

$$\underline{z}^* = a - \mathrm{j}\, b = z\, e^{-\mathrm{j}\,\theta}$$

d'où :

$$\underline{z} \times \underline{z}^* = |\underline{z}|^2 .$$

### I.2. Propriétés

Soient $\underline{z}_1$ et $\underline{z}_2$ deux nombres complexes. On peut montrer facilement les propriétés suivantes :

- $|\underline{z}_1 \times \underline{z}_2| = |\underline{z}_1| \times |\underline{z}_2|$ ;
- $\left|\dfrac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2}\right| = \dfrac{|\underline{z}_1|}{|\underline{z}_2|}$ ;
- $\arg(\underline{z}_1 \times \underline{z}_2) = \arg(\underline{z}_1) + \arg(\underline{z}_2)$ ;
- $\arg\left(\dfrac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2}\right) = \arg(\underline{z}_1) - \arg(\underline{z}_2)$.

**Application :**

Montrons la propriété : $\arg(\underline{z}_1 \times \underline{z}_2) = \arg(\underline{z}_1) + \arg(\underline{z}_2)$.

On exprime :

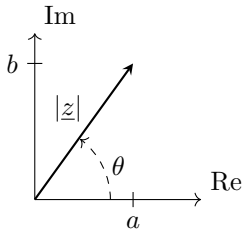
- $\arg(\underline{z}_1 \times \underline{z}_2) = \arg\left(z_1\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\theta_1}\, z_2\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\theta_2}\right) = \arg\left(z_1\, z_2\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta_1+\theta_2)}\right) = \theta_1 + \theta_2$ ;
- $\arg(\underline{z}_1) + \arg(\underline{z}_2) = \theta_1 + \theta_2$.

La propriété est démontrée.

### I.3. Interprétation géométrique

Dans le plan complexe, on peut associer au nombre complexe $\underline{z} = a + \mathrm{j}\, b$ le vecteur :

- de coordonnées cartésiennes $(a, b)$ ;
- de norme $|\underline{z}|$ ;
- dont l'angle avec l'axe des abscisses est $\theta = \arg(\underline{z})$.




## II. Fonctions

### II.1. Développements limités

La formule de Taylor permet d'exprimer pour une fonction :

$$f(a+x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1\,!}\, x + \frac{f''(a)}{2\,!}\, x^2 + \ldots$$

On en déduit alors les développements limités usuels lorsque $x \to 0$ :

- $\mathrm{e}^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \ldots$
- $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \ldots$
- $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \ldots$
- $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \ldots$

**Application :**

Déterminons le développement limité de $(1+x)^\alpha$ au second ordre lorsque $x \to 0$.

La formule de Taylor donne lorsque $x \to 0$ :

$$(1+x)^\alpha = (1+0)^\alpha + \frac{\alpha\,(1+0)^{\alpha-1}}{1}\, x + \frac{\alpha\,(\alpha-1)\,(1+0)^{\alpha-2}}{2}\, x^2 + \ldots,$$

$$\text{d'où : } (1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha\, x + \frac{\alpha\,(\alpha-1)}{2}\, x^2 + \ldots$$

### II.2. Valeur moyenne

La valeur moyenne d'une fonction périodique $f(t)$ de période $T$ est définie telle que :

$$\boxed{\langle f(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t}.$$

Il est nécessaire de connaitre les valeurs moyennes suivantes :

- $\langle \sin t\rangle = 0$ ;
- $\langle \cos t\rangle = 0$ ;
- $\langle \sin^2 t\rangle = \frac{1}{2}$ ;
- $\langle \cos^2 t\rangle = \frac{1}{2}$.

**Application :**

Déterminons la valeur moyenne de la fonction $f(t) = \sin(t)\cos(t)$ qui est périodique de période $\pi$.

$$\text{À l'aide des relations trigonométriques, on peut exprimer : } f(t) = \frac{\sin(2\,t)}{2},$$

$$\text{d'où : } \langle f(t)\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin(2\,t)}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(2\,t)}{4}\right]_0^{\pi} = 0.$$

## III. Équations différentielles

On rappelle ici les solutions des principales équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 1 et 2 rencontrées en physique.

### III.1. Équations différentielles du premier ordre

#### Équation homogène :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}\,u = 0$$

Solution : $u(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$, avec $A$ une constante.

Résolution :

- déterminer $A$ à partir d'une condition initiale.

#### Équation avec second membre constant :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}\,u = \frac{E}{\tau}$$

Solution : $u(t) = u_h(t) + u_p$, avec :

- $u_h(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$ la solution de l'équation homogène ;
- $u_p = E$ une solution particulière de l'équation.

Résolution :

- déterminer $A$ à partir d'une condition initiale, en utilisant la solution générale de l'équation (et pas juste la solution homogène).

**Équation avec second membre sinusoïdal :**

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}\,u = K\cos(\omega\,t + \varphi_1)$$

Solution : $u(t) = u_h(t) + u_p(t)$, avec :

- $u_h(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$ la solution de l'équation homogène ;
- $u_p(t) = B\,\cos(\omega\,t + \varphi_2)$ une solution particulière de l'équation, où $B$ et $\varphi_2$ sont des constantes.

Résolution :

- déterminer $B$ et $\varphi_2$ en cherchant une solution particulière de l'équation (on pourra utiliser la notation complexe) ;
- déterminer $A$ à partir d'une condition initiale, en utilisant la solution générale de l'équation.

## III.2. Équations différentielles du second ordre

**Équation homogène du type oscillateur harmonique :**

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\,u = 0$$

Solution : $u(t) = A\cos(\omega_0\,t) + B\sin(\omega_0\,t)$ ou $u(t) = C\cos(\omega_0\,t + \varphi)$, avec $A$, $B$, $C$ et $\varphi$ des constantes.

Résolution :

- déterminer $A$ et $B$ (ou $C$ et $\varphi$) à partir de deux conditions initiales.

**Équation avec second membre constant du type oscillateur harmonique :**

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\,u = \omega_0^2\,E$$

Solution : $u(t) = u_h(t) + u_p$, avec :

- $u_h(t) = A\cos(\omega_0\,t) + B\sin(\omega_0\,t)$ la solution de l'équation homogène ;
- $u_p = E$ une solution particulière de l'équation.

Résolution :

- déterminer $A$ et $B$ à partir de deux conditions initiales.

**Équation homogène du type oscillateur exponentiel :**

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} - \omega_0^2\,u = 0$$

Solution : $u(t) = A\,\mathrm{e}^{\omega_0\,t} + B\,\mathrm{e}^{-\omega_0\,t}$, avec $A$ et $B$ des constantes.

Résolution :

- déterminer $A$ et $B$ à partir de deux conditions initiales.

**Équation avec second membre constant du type oscillateur exponentiel :**

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} - \omega_0^2\,u = -\omega_0^2\,E$$

Solution : $u(t) = u_h(t) + u_p$, avec :

- $u_h(t) = A\,\mathrm{e}^{\omega_0\,t} + B\,\mathrm{e}^{-\omega_0\,t}$ la solution de l'équation homogène ;
- $u_p = E$ une solution particulière de l'équation.

Résolution :

- déterminer $A$ et $B$ à partir de deux conditions initiales.

### Équation homogène du type oscillateur amorti :

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,u = 0$$

Équation caractéristique : $r^2 + \dfrac{\omega_0}{Q}\,r + \omega_0^2 = 0$, de discriminant $\Delta = 4\,\omega_0^2\left(\dfrac{1}{4\,Q^2} - 1\right)$.

Solution :

- si $Q < \dfrac{1}{2}$, on a un régime apériodique : $u(t) = A\,\mathrm{e}^{r_1\,t} + B\,\mathrm{e}^{r_2\,t}$, avec $A$ et $B$ des constantes, $r_1$ et $r_2$ sont les racines du polynôme ;
- si $Q = \dfrac{1}{2}$, on a un régime critique : $u(t) = (A\,t + B)\,\mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2\,Q}\,t}$, avec $A$ et $B$ des constantes ;
- si $Q > \dfrac{1}{2}$, on a un régime pseudo-périodique : $u(t) = \mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2\,Q}\,t}\,[A\cos(\omega\,t) + B\sin(\omega\,t)]$, avec $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4\,Q^2}}$, $A$ et $B$ des constantes.

Résolution :

- déterminer le régime (apériodique, critique ou pseudo-périodique) en fonction de la valeur de $Q$ ;
- déterminer $A$ et $B$ à partir de deux conditions initiales.

### Équation avec second membre constant du type oscillateur amorti :

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,u = \omega_0^2\,E$$

Solution : $u(t) = u_h(t) + u_p$, avec :

- $u_h(t)$ la solution de l'équation homogène suivant le régime (voir ci-dessus) ;
- $u_p = E$ une solution particulière de l'équation.

Résolution :

- déterminer le régime (apériodique, critique ou pseudo-périodique) en fonction de la valeur de $Q$ ;
- déterminer $A$ et $B$ à partir de deux conditions initiales, en utilisant la solution générale de l'équation.

### Équation avec second membre exponentiel du type oscillateur amorti :

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,u = K\,\mathrm{e}^{\lambda\,t}$$

Solution : $u(t) = u_h(t) + u_p(t)$, avec :

- $u_h(t)$ la solution de l'équation homogène suivant le régime (voir ci-dessus) ;
- $u_p(t)$ une solution particulière de l'équation dont la forme dépend de $\lambda$ :
  - si $\lambda$ n'est pas une racine du polynôme, on cherche une solution de la forme $u_p(t) = C\,\mathrm{e}^{\lambda\,t}$, où $C$ est une constante,
  - si $\lambda$ est une racine simple du polynôme, on cherche une solution de la forme $u_p(t) = C\,t\,\mathrm{e}^{\lambda\,t}$, où $C$ est une constante,
  - si $\lambda$ est une racine double du polynôme, on cherche une solution de la forme $u_p(t) = C\,t^2\,\mathrm{e}^{\lambda\,t}$, où $C$ est une constante.

Résolution :

- déterminer le régime (apériodique, critique ou pseudo-périodique) en fonction de la valeur de $Q$ ;
- déterminer si $\lambda$ est une racine du polynôme ;
- déterminer $C$ en cherchant une solution particulière de l'équation (on pourra utiliser la notation complexe) ;
- déterminer $A$ et $B$ à partir de deux conditions initiales.

# IV. Calcul différentiel

## IV.1. Différentielle d'une fonction d'une variable

Soit $f(x)$ une fonction d'une variable. Pour une variation infinitésimale $\mathrm{d}x$ de la variable $x$, la fonction $f$ varie de $\mathrm{d}f$ telle que :

$$f(x+\mathrm{d}x) = f(x) + \mathrm{d}f.$$

La **différentielle de** $f$ s'exprime :

$$\mathrm{d}f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

avec $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ la dérivée de $f(x)$ par rapport à $x$.

## IV.2. Différentielle d'une fonction de deux variables

Soit $f(x,y)$ une fonction de deux variables. Pour une variation infinitésimale $\mathrm{d}x$ de la variable $x$, et une variation infinitésimale $\mathrm{d}y$ de la variable $y$, la fonction $f$ varie de $\mathrm{d}f$ telle que :

$$f(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y) = f(x,y) + \mathrm{d}f.$$

La **différentielle de** $f$ s'exprime :

$$\mathrm{d}f = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_y \mathrm{d}x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_x \mathrm{d}y$$

avec :

- $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_y$ la **dérivée partielle de** $f$ **par rapport à** $x$, c'est-à-dire la dérivée de $f(x,y)$ par rapport à $x$ en considérant que $y$ est constant ;
- $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_x$ la **dérivée partielle de** $f$ **par rapport à** $y$, c'est-à-dire la dérivée de $f(x,y)$ par rapport à $y$ en considérant que $x$ est constant.

Pour alléger l'écriture, on notera par la suite $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_y = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_x = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ en sous-entendant la variable constante.

On peut évidemment généraliser ces notions à des fonctions de trois variables ou plus.

## IV.3. Théorème de Schwarz

Une dérivée partielle première telle que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ peut être dérivée une seconde fois :

- par rapport à $x$, on obtient alors : $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ;
- par rapport à $y$, on obtient alors : $\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$.

Le **théorème de Schwarz** indique que les dérivées partielles croisées d'une fonction $f(x,y)$ sont égales :

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}}.$$

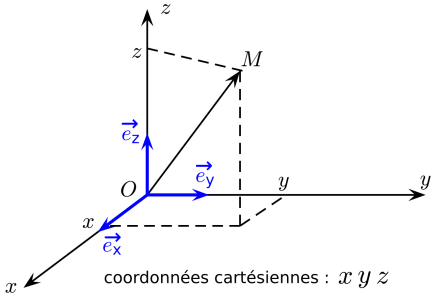
Mathématiquement, ce théorème n'est valable que si $f$ est de classe $C^2$, mais c'est toujours le cas en physique-chimie.

**Application :**

> Vérifions le théorème de Schwarz pour la fonction $f(x,y) = x^3\,(1+2\,y)$.
>
> On a :
> - $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3\,x^2\,(1+2\,y)$, d'où : $\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = 6\,x^2$ ;
> - $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2\,x^3$, d'où : $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 6\,x^2$.
>
> Le théorème de Schwarz est bien vérifié.

# V. Systèmes de coordonnées

Coordonnées cartésiennes :




Vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$$

Déplacement infinitésimal :

$$\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}x\,\vec{e}_x + \mathrm{d}y\,\vec{e}_y + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z$$

Surface infinitésimale :

- normale à $\vec{e}_x$ :

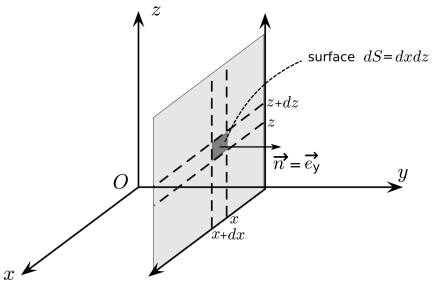
$$\mathrm{d}S_x = \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

- normale à $\vec{e}_y$ :

$$\mathrm{d}S_y = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$$

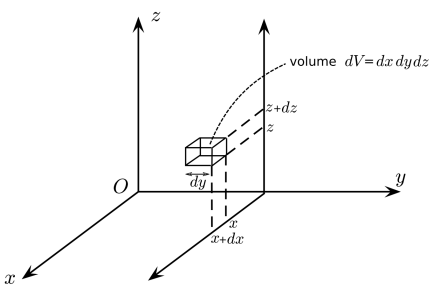
- normale à $\vec{e}_z$ :

$$\mathrm{d}S_z = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

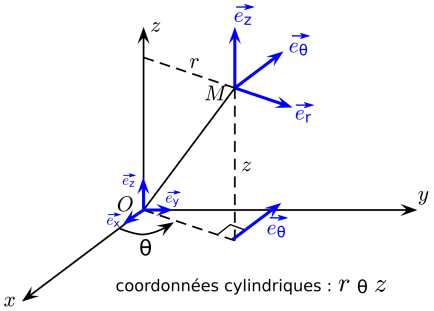



Volume infinitésimal :

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$




Coordonnées cylindriques :




Vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z$$

Déplacement infinitésimal :

$$\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z$$

Surface infinitésimale :

- normale à $\vec{e}_r$ :

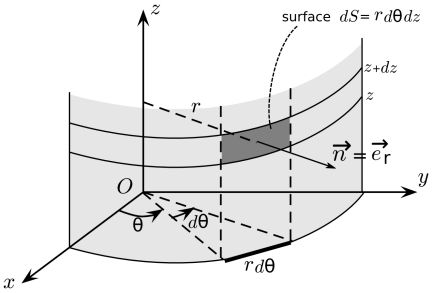
$$\mathrm{d}S_r = r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

- normale à $\vec{e}_\theta$ :

$$\mathrm{d}S_\theta = \mathrm{d}r\,\mathrm{d}z$$

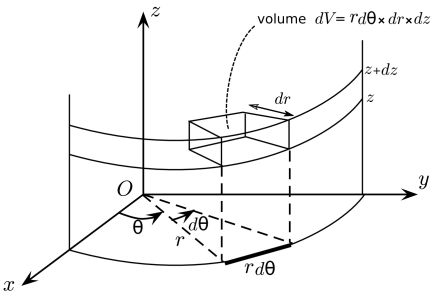
- normale à $\vec{e}_z$ :

$$\mathrm{d}S_z = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

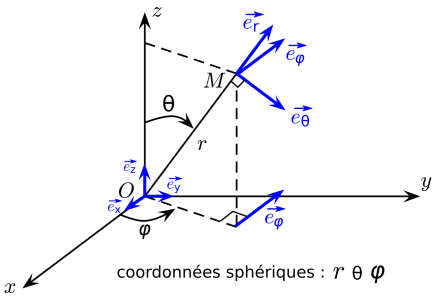



Volume infinitésimal :

$$\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$




Coordonnées sphériques :




Vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$$

Déplacement infinitésimal :

$$\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + r\,\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_\varphi$$

Surface infinitésimale :

- normale à $\vec{e}_r$ :

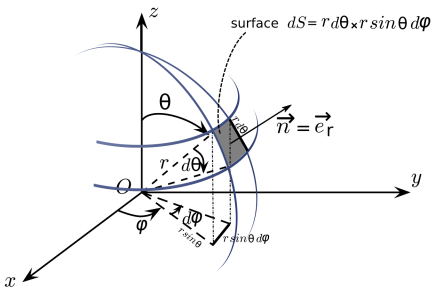
$$\mathrm{d}S_r = r^2\,\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

- normale à $\vec{e}_\theta$ :

$$\mathrm{d}S_\theta = r\,\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

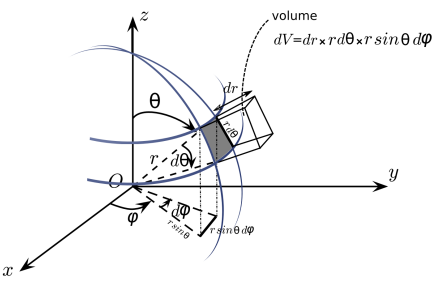
- normale à $\vec{e}_\varphi$ :

$$\mathrm{d}S_\varphi = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$




Volume infinitésimal :

$$\mathrm{d}V = r^2\,\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$



# VI. Analyse vectorielle

## VI.1. Définitions

Un **champ scalaire** est une fonction qui associe un nombre à tout point de l'espace.

Exemples : la pression $P$, la température $T$, l'indice optique $n$ d'un milieu...

Un **champ vectoriel** est une fonction qui associe un vecteur à tout point de l'espace.

Exemples : le champ électrique $\vec{E}$, le champ magnétique $\vec{B}$, le champ de pesanteur $\vec{g}$...

## VI.2. Intégrations

Soit $f(x,y,z)$ un champ scalaire :

- $\displaystyle\int_C f\,\mathrm{d}\ell$ est l'intégrale de la quantité $f$ sur le chemin $C$ ;
- $\displaystyle\iint_S f\,\mathrm{d}S$ est l'intégrale de la quantité $f$ sur la surface $S$ ;
- $\displaystyle\iiint_V f\,\mathrm{d}V$ est l'intégrale de la quantité $f$ sur le volume $V$.

Soit $\vec{A}(x,y,z)$ un champ vectoriel :

- $\displaystyle\int_C \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}$ est l'intégrale, aussi appelée la **circulation**, du vecteur $\vec{A}$ le long du chemin $C$ ;
- $\displaystyle\iint_S \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$ est l'intégrale, aussi appelée le **flux**, de $\vec{A}$ à travers la surface $S$, avec $\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\,\vec{n}$ où $\vec{n}$ est le vecteur normal à la surface, orienté vers l'extérieur par convention.

Par convention, lorsqu'on réalise une intégrale sur un contour fermé, on la note $\displaystyle\oint_C$. De même, lorsqu'on réalise une intégrale sur une surface fermée, on la note $\displaystyle\oiint_S$.

**Application :**

> Retrouvons que le volume d'un cylindre de rayon $R$ et de hauteur $H$ est $\pi\,R^2\,H$ en intégrant des volumes infinitésimaux $\mathrm{d}V$.
>
> On intègre les volumes infinitésimaux $\mathrm{d}V$ constituant le cylindre en coordonnées cylindriques : $V_{\text{cylindre}} = \displaystyle\iiint_{\text{cylindre}} \mathrm{d}V = \iiint_{\text{cylindre}} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$,
>
> d'où avec les bornes du cylindre :
>
> $$V_{\text{cylindre}} = \int_{r=0}^{R} r\,\mathrm{d}r \int_{\theta=0}^{2\,\pi} \mathrm{d}\theta \int_{z=0}^{H} \mathrm{d}z = \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R [\theta]_0^{2\,\pi}\,[z]_0^H = \frac{R^2}{2}\,2\,\pi\,H$$
>
> $$V_{\text{cylindre}} = \pi\,R^2\,H.$$

## VI.3. Différentielle d'un champ scalaire

Soit $f(x,y,z)$ un champ scalaire en coordonnées cartésiennes. La variation infinitésimale du champ $f$ pour un déplacement $\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}x\,\vec{e}_x + \mathrm{d}y\,\vec{e}_y + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z$ est donnée par sa différentielle :

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z.$$

Pour exprimer la variation $\mathrm{d}f$ en fonction du déplacement $\mathrm{d}\vec{\ell}$, on définit **l'opérateur gradient** en coordonnées cartésiennes tel que :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{e}_z.$$

On peut alors exprimer la différentielle :

$$\mathrm{d}f = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \mathrm{d}\,\vec{\ell}\,.$$

## VI.4. Expression des opérateurs en coordonnées cartésiennes

Soit $f(x,y,z)$ un champ scalaire, et $\vec{A} = A_x(x,y,z)\,\vec{e}_x + A_y(x,y,z)\,\vec{e}_y + A_z(x,y,z)\,\vec{e}_z$ un champ vectoriel en coordonnées cartésiennes.

Pour définir différents opérateurs fréquemment rencontrés en physique, on introduit le **vecteur nabla** :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\,\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\,\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\,\vec{e}_z.$$

Ce n'est pas réellement un vecteur, mais il permet de retrouver facilement les formules des opérateurs en coordonnées cartésiennes (attention ce n'est pas le cas pour les autres systèmes de coordonnées).

On définit les opérateurs suivants :

- gradient :
$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{e}_z$$
- divergence :
$$\text{div}\,\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$
- rotationnel :
$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$$
- laplacien scalaire :
$$\Delta f = \vec{\nabla}^2 f = \text{div}\left(\overrightarrow{\text{grad}} f\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$
- laplacien vectoriel :
$$\begin{aligned}\Delta\vec{A} &= \Delta A_x\,\vec{e}_x + \Delta A_y\,\vec{e}_y + \Delta A_z\,\vec{e}_z \\ &= \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)\vec{e}_z.\end{aligned}$$

**Application :**

> Exprimons le gradient et le laplacien scalaire du champ scalaire $f(x,y,z) = x^2 + x\,y + y^2$.
>
> On calcule les dérivées partielles : $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2\,x + y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x + 2\,y$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z} = 0$,
>
> d'où le gradient : $\overrightarrow{\text{grad}} f = (2\,x + y)\,\vec{e}_x + (x + 2\,y)\,\vec{e}_y$.
>
> On calcule les dérivées secondes : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$,
>
> d'où le laplacien scalaire : $\Delta f = 4$.

## VI.5. Expression des opérateurs en coordonnées cylindriques

Soit $f(r,\theta,z)$ un champ scalaire, et $\vec{A} = A_r(r,\theta,z)\,\vec{e}_r + A_\theta(r,\theta,z)\,\vec{e}_\theta + A_z(r,\theta,z)\,\vec{e}_z$ un champ vectoriel en coordonnées cylindriques.

Les opérateurs s'expriment :

- gradient :
$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\vec{e}_r + \frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{e}_z$$
- divergence :
$$\text{div}\,\vec{A} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial\,(r\,A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$
- rotationnel :
$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\,(r\,A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z$$
- laplacien scalaire :
$$\Delta f = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

## VI.6. Expression des opérateurs en coordonnées sphériques

Soit $f(r,\theta,\varphi)$ un champ scalaire, et $\vec{A} = A_r(r,\theta,\varphi)\,\vec{e}_r + A_\theta(r,\theta,\varphi)\,\vec{e}_\theta + A_\varphi(r,\theta,\varphi)\,\vec{e}_\varphi$ un champ vectoriel en coordonnées sphériques.

Les opérateurs s'expriment :

- gradient :
$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\vec{e}_r + \frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial f}{\partial \varphi}\,\vec{e}_\varphi$$
- divergence :
$$\text{div}\,\vec{A} = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial\left(r^2\,A_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial\,(\sin\theta\,A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$
- rotationnel :
$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial\,(\sin\theta\,A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial\,(r\,A_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\,(r\,A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_\varphi$$
- laplacien scalaire :
$$\Delta f = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}.$$

## VI.7. Propriétés

### Opérateurs appliquées à un produit

On peut montrer facilement les propriétés suivantes en utilisant les coordonnées cartésiennes :

- $\overrightarrow{\text{grad}}\,(f\,g) = f\,\overrightarrow{\text{grad}} g + g\,\overrightarrow{\text{grad}} f$ ;
- $\text{div}\left(f\,\vec{A}\right) = f\,\text{div}\,\vec{A} + \left(\overrightarrow{\text{grad}} f\right)\cdot\vec{A}$ ;
- $\overrightarrow{\text{rot}}\left(f\,\vec{A}\right) = f\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} + \left(\overrightarrow{\text{grad}} f\right)\wedge\vec{A}$ ;
- $\text{div}\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right) = \vec{B}\cdot\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} - \vec{A}\cdot\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}$.

### Composition d'opérateurs

On peut montrer facilement les propriétés suivantes en utilisant les coordonnées cartésiennes :

- $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{grad}} f\right) = \vec{0}$ ;
- $\text{div}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}\right) = 0$ ;
- $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}\right) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\,\vec{A}\right) - \Delta\vec{A}$.

**Application :**

Montrons que $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{grad}} f\right) = \vec{0}$ avec les coordonnées cartésiennes.

On exprime :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{grad}} f\right) &= \left(\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial z} - \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y}\right)\vec{e}_z \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right)\vec{e}_z \\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

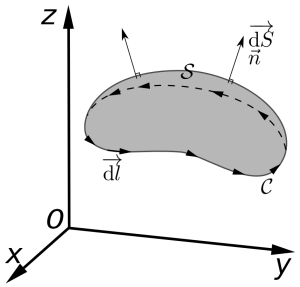
en utilisant le théorème de Schwarz.

## VI.8. Théorèmes

### Théorème de Stokes

Soit $\vec{A}$ un champ vectoriel, $C$ un contour fermé orienté, et $S$ une surface qui s'appuie sur le contour $C$ et orientée dans le sens direct par rapport à $C$ (c'est-à-dire en utilisant la règle de la main droite).
On admet le **théorème de Stokes** :

$$\boxed{\oint_C \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \iint_S \left(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{S}}.$$




### Théorème d'Ostrogradski

Soit $\vec{A}$ un champ vectoriel, $V$ un volume, et $S$ la surface fermée qui entoure le volume $V$ et dont la normale est orientée vers l'extérieur.
On admet le **théorème d'Ostrogradski** :

$$\boxed{\oiint_S \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \left(\text{div}\vec{A}\right)\mathrm{d}V}.$$

